特 別 研 究 報 告

題　　目

離散事象システムにおける
非決定状態フィードバックに関する研究

指 導 教 官

児玉慎三 教授

報　告　者

更科 渉

平成 6 年 3 月 2 日

大阪大学工学部　電子工学科

序

本論文は，筆者が大阪大学工学部電子工学科に在学中に，特別研究として行った「離散事象システムにおける非決定状態フィードバック制御に関する研究」をまとめたものである．

目 次

1 緒言 **1**

2 定式化 **3**
2.1 対象システム 3
2.2 述語 4

3 Γ-可制御性と非決定状態フィードバック **7**

4 最大Γ-可制御部分述語 **11**

5 例題 **15**

6 結言 **17**

1 緒言

複数の離散的事象が非同期，並列に進行するシステムは離散事象システム[1]と呼ばれ，ＦＭＳ，ＯＳ，通信システム，データベースシステム，シーケンス制御などがその例としてあげられる．また近年の離散事象システムの大規模，複雑化に伴い，その制御仕様もますます複雑となってきている．このためシステム理論的観点から離散事象システムの制御理論を構築することは重要な問題である[2],[3]．排他制御やデッドロック回避など離散事象システムにおける多くの典型的な制御問題は，状態の集合上の述語で与えられる仕様を満たさないような状態に到達しないようにシステムを制御する問題として定式化できる．そしてこの問題に対しては，RamadgeとWonhamによって提案されている状態フィードバック制御[4]が有効である．

LiとWonhamは，閉ループシステムにおける可達な状態の集合が与えられた述語Qを満たす状態の集合と等しくなるような状態フィードバックが存在するための必要十分条件は，Qが可制御であるということを示している[5]．しかし，一般に与えられた述語が可制御であるとは限らない．その場合には与えられた述語の最大可制御部分述語に対して状態フィードバックを構成することになる[5],[6]．LiとWonhamは，最大可制御部分述語の構成法についても考察している[5]．またKumarらによっても同様の結果が得られている[6]．彼らが考察したシステムでは，(外部の)コントローラによってその生起が禁止できる事象は，それぞれ独立にその生起が禁止できると仮定されている．この場合，状態フィードバックによって生起が許容される事象の集合を表す制御パターンの集合は部分束となる[7]．

一方，このような仮定を取り除いた場合の状態フィードバック制御についても考察されている[8]．しかし制御パターンの集合が部分束でなければ, 通常の状態フィードバックでは制御仕様が満足されないが，状態の集合から制御パターンの集合のべき集合への写像として定義される非決定状態フィードバック[9]を用いることにより，その仕様が満足される場合があることが指摘されている．このような意味において，非決定状態フィードバックは通常の状態フィードバックよりも有効であるといえる．

しかし，従来そのような非決定状態フィードバックの存在条件および一般的な構成法は得られていなかった．そこで本論文では，非決定状態フィードバックの存在条件およびその構成法を求める方法について考察する．

本論文の構成は以下の通りである．2章では，対象システムと非決定状態フィードバック制御の定義について述べる．3章では，述語のΓ-可制御性の概念を定義し，与えられた述語が非決定状態フィードバックによって得られるための必要十分条件は，その述語がΓ-可制御であるというこ

とを示す.しかし,一般に与えられた述語がΓ-可制御であるとは限らない.そこで4章では与えられた述語を満たす状態の集合が有限である場合に関して,Γ-可制御部分述語の存在条件及び最大Γ-可制御部分述語の構成法を示す.最後に5章では,得られた結果を簡単な生産システムの制御に応用する.

2 定式化

2.1 対象システム

対象システムGは(1)式で表されるオートマトン[10]でモデル化されているとする．

$$G = (X, \Sigma, \delta, x^0) \tag{1}$$

但し，Xは状態の集合，x^0は初期状態，Σは事象の有限集合，$\delta : \Sigma \times X \to X$は状態遷移関数であり，一般に部分関数である．以下$\sigma \in \Sigma$と$x \in X$に対して，$\delta(\sigma, x)$が定義されているとき，$\delta(\sigma, x)!$と書く．

一般に離散事象システムにおいて，コントローラは，ある規則に従っていくつかの事象の生起を禁止することにより，好ましくない状態へ到達しないようにシステムを制御する．従って，この規則をシステマティックに求めることが，離散事象システムにおける重要な研究課題である．生起を禁止する事象の決定規則が，そのときの状態のみに依存するようなコントローラを(静的)状態フィードバックと呼ぶ[4]．状態フィードバックによって生起が許容される事象の集合を制御パターンと言う．制御パターンの集合Γは，Σのべき集合2^Σの部分集合であり，次の条件(C1)を満たす[11],[7]．

(C1) 任意の$\sigma \in \Sigma$に対して，$\sigma \in \gamma$を満たす$\gamma \in \Gamma$が存在する．

形式的に，非決定状態フィードバックfはXから2^Γへの写像として表される．つまり，非決定状態フィードバックとは，システムのそれぞれの状態に対して，適切な制御パターンの集合を与える制御規則である．非決定状態フィードバックfを施した閉ループシステムを$G|f$と書く．$G|f$では，それぞれの状態$x \in X$において，$f(x)$の要素である制御パターンが一つ選択される．その制御パターンを$\gamma \in f(x)$と書くと，xにおいて$\sigma \notin \gamma$なる事象$\sigma \in \Sigma$はその生起が禁止される．

[例　1]図1に示される離散事象システムを考える．ここで，$X = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}, \Sigma = \{\sigma^1, \sigma^2\}$であり，$x^0$は初期状態である．そして制御パターンの集合$\Gamma$を

$$\Gamma = \{\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}\}$$

とする．今，次式で与えられる非決定状態フィードバック$f : X \to 2^\Gamma$を考える．

$$f(x) = \begin{cases} \{\{\sigma_1\}\} & \text{if } x = x^1 \\ \{\{\sigma_2\}\} & \text{if } x = x^2 \\ \{\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}\} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

ここで$G|f$において，例えば$x = x^0$のとき，$\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\} \in f(x^0)$のいずれかが選択される．そして$\{\sigma_1\}(\{\sigma_2\})$が選択されたならば，$\sigma_2(\sigma_1)$の生起が禁止される．また$x = x^1(x^2)$の場合は常に$\sigma_2(\sigma_1)$の生起が禁止される．$x^3$については$x^0$と同様である．

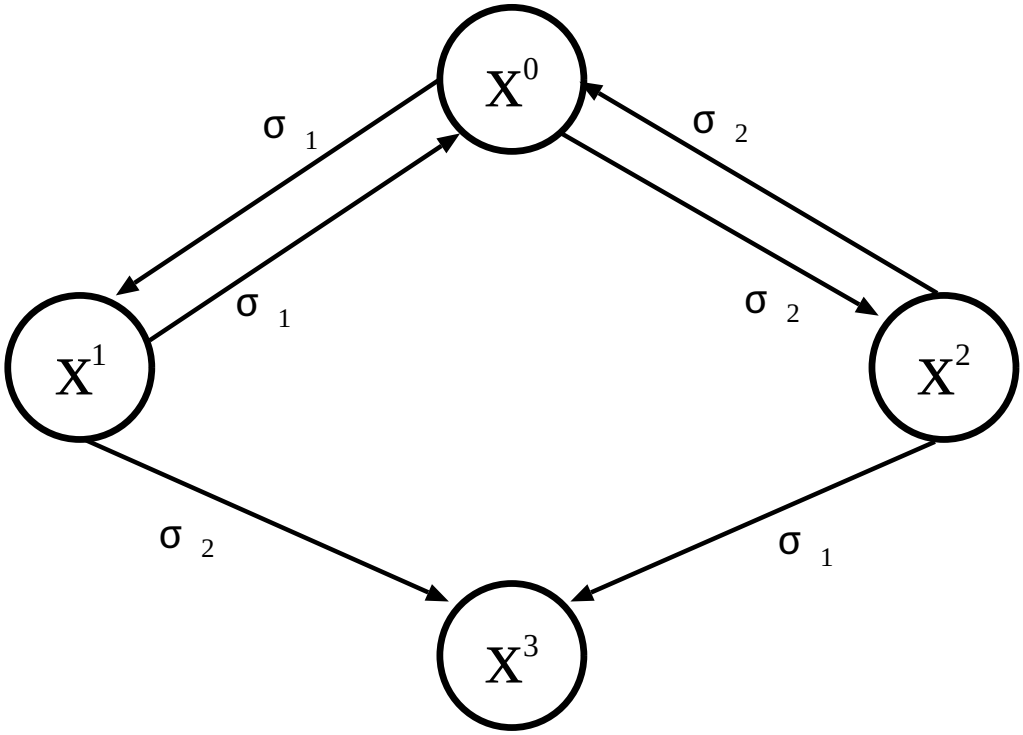

図 1: ある離散事象システム

2.2 述語

本論文では，制御仕様は状態の集合上の述語で与えられているとする．X上の述語の集合を$\mathbf{P}$とおく．状態$x \in X$において，述語$Q \in \mathbf{P}$が真であるとき$Q(x) = 1$，偽であるとき$Q(x) = 0$と定義する．$\mathbf{P}$上の基本的演算である否定 ~ ，交わり$\wedge$ ，結び$\vee$ ，をそれぞれ次のように定義する．任意の$x \in X$に対して，

$$
\begin{aligned}
\sim Q_1(x) = 1 \quad &\leftrightarrow \quad Q_1(x) = 0 \\
(Q_1 \wedge Q_2)(x) = 1 \quad &\leftrightarrow \quad Q_1(x) = 1 \text{ and } Q_2(x) = 1 \\
Q_1 \vee Q_2 \quad &= \quad \sim((\sim Q_1) \wedge (\sim Q_2))
\end{aligned}
$$

次に$\mathbf{P}$上の半順序関係$\leq$を，$Q_1 \wedge Q_2 = Q_1$のとき$Q_1 \leq Q_2$と定義する．そして$Q_1 \leq Q_2$であるとき, Q_1はQ_2の部分述語であると言う．更に各$\sigma \in \Sigma$に対して, 述語D_σと$\mathbf{P}$上の変換wp_σとwlp_σを次のように定義する[4]．

$$D_\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta(\sigma, x)! \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$wp_\sigma(Q)(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta(\sigma, x)! \text{ and } Q(\delta(\sigma, x)) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$wlp_\sigma(Q) = wp_\sigma(Q) \vee \sim D_\sigma$$

事象σの生起により,状態xからQを満たす状態に遷移するとき，$wp_\sigma(Q)(x)$は1，そうでないとき0となる．また状態xにおいて，σは生起不可能であるか，σの生起後の状態がQを満たすとき，$wlp_\sigma(Q)(x)$は1，そうでないとき0となる．

非決定状態フィードバックfに対して述語$Re(G|f) \in \mathbf{P}$を次のように帰納的に定義する．

(C2)$Re(G|f)(x^0) = 1$
(C3)$Re(G|f)(x) = 1$であり，$D_\sigma(x) = 1$なる$\sigma \in \Sigma$に対して，$\sigma \in \gamma$なる$\gamma \in f(x)$が存在するならば，$Re(G|f)(\delta(\sigma, x)) = 1$である.
(C4)$Re(G|f)$を満たす全ての状態は上の(C2),(C3)で得られる．

述語$Re(G|f) \in \mathbf{P}$は$G|f$における可達な状態においてのみ真となる述語である．つまり，$Re(G|f)(x) = 1$なる任意の$x \in X$に対して，次の条件(C5)~(C7)を満たす$x^1, x^2, \cdots, x^m \in X$と$\sigma^0, \sigma^1, \cdots, \sigma^{m-1} \in \Sigma$と$\gamma^0, \gamma^1, \cdots, \gamma^{m-1} \in \Gamma$が存在する．

(C5)$\delta(\sigma^j, x^j) = x^{j+1}$ for $j = 0, 1, \cdots, m-1$
(C6)$\sigma^j \in \gamma^j \in f(x^j)$ for $j = 0, 1, \cdots, m-1$
(C7)$x^m = x$

[例　2]例1と同じシステムを考える．(2)式で与えられた非決定状態フィードバックfに対して, まず定義より，$Re(G|f)(x^0) = 1$である．そして$D_{\sigma_1}(x^0) = 1 (D_{\sigma_2}(x^0) = 1)$かつ$\sigma_1 \in \{\sigma_1\} \in f(x^0) (\sigma_2 \in \{\sigma_2\} \in f(x^0))$であるから, $Re(G|f)(x^1) = 1 (Re(G|f)(x^2) = 1)$となる．さらに$x^1, x^2$において, それぞれ$\sigma_1, sigma_2$の生起は常に禁止される. よって$Re(G|f)$は次式で得られる．

$$Re(G|f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{x^0, x^1, x^2\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

制御仕様が，$Q(x^0) = 1$ なる述語 $Q \in \mathbf{P}$ で与えられているとき，

$$Re(G|f) = Q \tag{3}$$

となるような非決定状態フィードバック $f : X \to 2^{\Gamma}$ を求めることが設計問題となる．(3) 式は，f を施した閉ループシステムでの可達な状態の集合が，Q を満たす状態の集合と等しくなることを意味する．換言すれば，(3) 式を満たす f により，Q を閉ループシステムでの可達な状態の集合として実現することができる．

3 Γ-可制御性と非決定状態フィードバック

本章では，(3) 式を満たす非決定状態フィードバックが存在するための必要十分条件とその構成法を示す．

述語 $Q \in \mathbf{P}$ と状態 $x \in X$ に対して，部分集合 $2^{\Gamma}(Q,x) \subseteq 2^{\Gamma}$ を次式で定義する．

$$2^{\Gamma}(Q,x) = \{\Gamma' \in 2^{\Gamma}; \bigwedge_{\sigma\in\gamma} wlp_{\sigma}(Q)(x) = 1 \quad \text{for any } \gamma \in \Gamma'\} \tag{4}$$

つまり $2^{\Gamma}(Q,x)$ は，その生起により，x から Q を満たさない状態に遷移する全ての事象を禁止する制御パターンの集合のベキ集合である．ここで，$\mathbf{P}$ 上の変換 $Pern$ を次式で定義する．

$$Pern(Q)(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 2^{\Gamma}(Q,x) \neq \phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

【命題 1】述語 $Q \in \mathbf{P}$ と $Pern(Q)(x) = 1$ なる状態 $x \in X$ に対して，$2^{\Gamma}(Q,x)$ の最大要素 $\sup 2^{\Gamma}(Q,x)$ は存在し，次式で与えられる．

$$\sup 2^{\Gamma}(Q,x) = \{\gamma \in \Gamma; \bigwedge_{\sigma\in\gamma} wlp_{\sigma}(Q)(x) = 1\} \tag{5}$$

(証明) まず $\sup 2^{\Gamma}(Q,x)$ が存在することを証明する．任意の $\Gamma'_1, \Gamma'_2 \in 2^{\Gamma}(Q,x)$ に対して，$\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 \in 2^{\Gamma}(Q,x)$ となることを示せば十分である．$\gamma \in \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ なる $\gamma \in \Gamma$ を考える．$\gamma \in \Gamma'_1$ ならば，

$$\bigwedge_{\sigma\in\gamma} wlp_{\sigma}(Q)(x) = 1 \tag{6}$$

となる．また $\gamma \in \Gamma'_2$ の場合も同様である．よって $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 \in 2^{\Gamma}(Q,x)$ となる．

次に (5) 式を証明する．

$$\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma; \bigwedge_{\sigma\in\gamma} wlp_{\sigma}(Q)(x) = 1\}$$

とおく．任意の $\gamma \in \Gamma(x)$ に対して，(6) 式が成り立つので，$\Gamma(x) \in 2^{\Gamma}(Q,x)$ である．よって任意の $\Gamma' \in 2^{\Gamma}(Q,x)$ に対して，$\Gamma' \subseteq \Gamma(x)$ となることを示せば十分である．任意の $\gamma \in \Gamma'$ に対して，(6) 式が成り立つので，$\gamma \in \Gamma(x)$ である．故に $\Gamma' \subseteq \Gamma(x)$ となる． □

$Q(x^0) = 1$ なる $Q \in \mathbf{P}$ に対して，$\mathbf{P}$ 上の変換 P_{Ren} を次のように帰納的に定義する：

(C8)$P_{Ren}(Q)(x^0) = 1$

(C9)$P_{Ren}(Q)(x) = 1$ であり，$D_{\sigma_1}(x) = 1$ なる$\sigma \in \Sigma$に対して，$\sigma \in \gamma$なる $\gamma \in \sup 2^{\Gamma}(Q, x)$ が存在するならば，$P_{Ren}(Q)(\delta(\sigma, x)) = 1$ である．

(C10)$P_{Ren}(Q)$ を満たす全ての状態は上の (C8),(C9) により得られる．

つまり，$P_{Ren}(Q)(x) = 1$ なる任意の $x \in X$に対して，次の条件 (C11) ~ (C14) を満たす $x^1, x^2, \cdots, x^m \in X$と$\sigma^0, \sigma^1, \cdots, \sigma^{m-1} \in \Sigma$と$\gamma^0, \gamma^1, \cdots, \gamma^{m-1} \in \Gamma$が存在する．

(C11)$\delta(\sigma^j, x^j) = x^{j+1} \quad$ for $j = 0, 1, \cdots, m-1$

(C12)$Q(x^j) = 1 \quad$ for $j = 0, 1, \cdots, m$

(C13)$\sigma^j \in \gamma^j \in \sup 2^{\Gamma}(Q, x^j) \quad$ for $j = 0, 1, \cdots, m-1$

(C14)$x^m = x$

そして明らかに

$$P_{Ren}(Q) \leq Q \tag{7}$$

となる．

ここで述語のΓ-可制御性を定義する．

【定義 1】$Q(x^0) = 1$ なる述語 $Q \in \mathbf{P}$ が次式を満たすとき，Q は（G に関して）Γ-可制御であると言う．

$$Q \leq P_{Ren}(Q) \wedge Pern(Q) \tag{8}$$

そして (3) 式を満たす非決定状態フィードバックが存在するための必要十分条件を次の定理に示す.

【定理 1】$Q(x^0) = 1$ なる述語 $Q \in \mathbf{P}$ に対して，$Re(G|f) = Q$ なる非決定状態フィードバック $f : X \to 2^{\Gamma}$が存在するための必要十分条件は，Q が（G に関して）Γ-可制御となることである．

まず次の補題を証明する．

【補題 1】$Q(x^0) = 1$ なる述語 $Q \in \mathbf{P}$ において，$Re(G|f) = Q$ となる任意の非決定状態フィードバック $f : X \to 2^{\Gamma}$に対して, 次式が成り立つ．

$$f(x) \in 2^{\Gamma}(Q, x) \quad {}^{\forall}x \in X \text{ with } Q(x) = 1 \tag{9}$$

(証明) $Q(x) = 1$ なる任意の $x \in X$ に対して，$Re(G|f) = Q$ より，$Re(G|f)(x) = 1$ である．$\gamma \in f(x)$ なる γ を考える．$\sigma \in \gamma$ なる $\sigma \in \Sigma$ に対して，$D_\sigma(x) = 0$ ならば，$wlp_\sigma(Q)(x) = 1$ である．$D_\sigma(x) = 1$ の場合を考える．このとき，$Q(\delta(\sigma, x)) = Re(G|f)(\delta(\sigma, x)) = 1$ となり，$wlp_\sigma(Q)(x) = 1$ であるので，$\bigwedge_{\sigma\in\gamma} wlp_\sigma(Q)(x) = 1$ である．故に $f(x) \in 2^\Gamma(Q, x)$ となる． □

(定理 1 の証明) まず十分性を証明する．Q の Γ-可制御性より，$Q(x) = 1$ なる任意の $x \in X$ に対して，$Pern(Q)(x) = 1$ である．よって命題 1 より，次式のような非決定状態フィードバック $f_{sn} : X \to 2^\Gamma$ が定義できる．

$$f_{sn}(x) = \begin{cases} \sup 2^\Gamma(Q, x) & \text{if } Q(x) = 1 \\ \Gamma & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

このとき，$Re(G|f_{sn}) = Q$ となることを示す．まず $Re(G|f_{sn}) \leq Q$ を証明する．$Re(G|f_{sn})(x) = 1$ なる任意の $x \in X$ に対して，条件 (C5)~(C7) を満たす $x^1, x^2, \cdots, x^m \in X$ と $\sigma^0, \sigma^1, \cdots, \sigma^{m-1} \in \Sigma$ と $\gamma^0, \gamma^1, \cdots, \gamma^{m-1} \in \Gamma$ が存在する (但し，(C6) において $f_{sn} := f$ とする)．$Q(x) = Q(x^m) = 1$ となることを帰納法により示す．仮定より $Q(x^0) = 1$ である．今，$j = k$ のとき，$Q(x^k) = 1$ であると仮定する．条件 (C6) と (10) 式より，$\sigma^k \in \gamma^k \in \sup 2^\Gamma(Q, x^k)$ である．これより $wlp_{\sigma^k}(Q)(x^k) = 1$ であるから，$Q(x^{k+1}) = 1$ である．

逆に $Q \leq Re(G|f_{sn})$ を証明する．Q の Γ-可制御性より，$Q(x) = 1$ なる任意の $x \in X$ に対して，$P_{Ren}(Q)(x) = 1$ である．このとき, 条件 (C11)~(C14) を満たす $x^1, x^2, \cdots, x^m \in X$ と $\sigma^0, \sigma^1, \cdots, \sigma^{m-1} \in \Sigma$ と $\gamma^0, \gamma^1, \cdots, \gamma^{m-1} \in \Gamma$ が存在する．$Re(G|f_{sn})(x) = 1$ を示すには，各 $j (j = 0, 1, \cdots, m-1)$ に対して，$\gamma^j \in f_{sn}(x^j)$ となることを示せば十分であり，条件 (C12),(C13) と (10) 式より，$\gamma^j \in f_{sn}(x^j)$ を得る．

次に必要性を証明する．$Re(G|f) = Q$ なる非決定状態フィードバック $f : X \to 2^\Gamma$ が存在するとする．$Q(x) = 1$ なる $x \in X$ を考える．補題 1 より，$f(x) \in 2^\Gamma(Q, x) \neq \phi$ であるから，$Pern(Q)(x) = 1$ である．次に $P_{Ren}(Q)(x) = 1$ を示す．$Re(G|f)(x) = 1$ であるから，条件 (C5)~(C7) を満たす $x^1, x^2, \cdots, x^m \in X$ と $\sigma^0, \sigma^1, \cdots, \sigma^{m-1} \in \Sigma$ と $\gamma^0, \gamma^1, \cdots, \gamma^{m-1} \in \Gamma$ が存在する．$P_{Ren}(Q)(x) = P_{Ren}(Q)(x^m) = 1$ となることを帰納法により示す．定義より $P_{Ren}(Q)(x^0) = 1$ である．今，$j = k$ のとき，$P_{Ren}(Q)(x^k) = 1$ であると仮定する．このとき，(7) 式より $Q(x^k) = 1$ である．そして条件 (C6) と補題 1 より，$\sigma^k \in \gamma^k \in f(x^k) \subseteq \sup 2^\Gamma(Q, x^k)$ である．故に $P_{Ren}(Q)(x^{k+1}) = 1$ である．□

定理 1 の証明より，Q が Γ-可制御であるならば，(10) 式で与えられた f_{sn} に対して，$Re(G|f_{sn}) = Q$ となる．

[例　3]例 1 と同じシステムを考える．このとき x^3を禁止状態とすると，制御仕様は述語 Q を用いて次のように表せる．

$$Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{x^0, x^1, x^2\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，各 $x \in X$に対して, $\sup 2^{\Gamma}(Q, x)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \sup 2^{\Gamma}(Q, x^0) &= \sup 2^{\Gamma}(Q, x^3) = \{\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}\} \\ \sup 2^{\Gamma}(Q, x^1) &= \{\{\sigma_1\}\} \\ \sup 2^{\Gamma}(Q, x^2) &= \{\{\sigma_2\}\} \end{aligned}$$

これより $Q \leq Pern(Q)$ である. $Q \leq P_{Ren}(Q)$ かどうかを調べる. 定義より, $P_{Ren}(Q)(x^0) = 1$ である. そして$\sigma_1 \in \{\sigma_1\} \in \sup 2^{\Gamma}(Q, x^0)$ かつ$\sigma_2 \in \{\sigma_2\} \in \sup 2^{\Gamma}(Q, x^0)$ であるから, $P_{Ren}(Q)(x^1) = P_{Ren}(Q)(x^2) = 1$ である. ゆえに $Q \leq P_{Ren}(Q)$ となり, Q はΓ-可制御である. さらに (2) 式で与えられた非決定状態フィードバックに対して，$Re(G|f) = Q$ となる．

4　最大Γ-可制御部分述語

定理 1 において，$Q(x^0)=1$ なる述語 $Q\in\mathbf{P}$ に対して，$Re(G|f)=Q$ なる非決定状態フィードバック $f:X\to 2^{\Gamma}$ が存在するための必要十分条件は，Q がΓ-可制御であるということを示した．しかし一般に，与えられた述語がΓ-可制御であるとは限らない．この場合，Q のΓ-可制御部分述語に対して，非決定状態フィードバックを構成することになる．

今，$Q(x^0)=1$ なる述語 $Q\in\mathbf{P}$ に対して，部分集合 $\Gamma C(Q)\subseteq\mathbf{P}$ を次式で定義する．

$$\Gamma C(Q)=\{Q'\in\mathbf{P};\, Q'(x^0)=1,\ Q'\le Q \text{ かつ } Q' \text{はΓ-可制御}\}$$

そして $\Gamma C(Q)$ の $\le$ に関する最大要素 $\sup\Gamma C(Q)$ を，Q の最大Γ-可制御部分述語と言う．$\sup\Gamma C(Q)$ の存在性に関して，次の命題が得られる．

【命題 2 】$Q(x^0)=1$ なる述語 $Q\in\mathbf{P}$ に対して，$\Gamma C(Q)\neq\phi$ であるならば，$\sup\Gamma C(Q)$ は存在する．

(証明) I はインデックス集合であり，各 $\alpha\in I$ に対して，$Q_\alpha\in\Gamma C(Q)$ とする．ここで，

$$\hat{Q}=\bigvee_{\alpha\in I}Q_\alpha$$

とおくと，明らかに $\hat{Q}(x^0)=1$ かつ $\hat{Q}\le Q$ である．$\hat{Q}$ がΓ-可制御であることを証明する．$\hat{Q}(x)=1$ なる任意の $x\in X$ に対して，$Q_\beta(x)=1$ なる $\beta\in I$ が存在する．このとき，Q_β のΓ-可制御性より，$P_{Ren}(Q_\beta)(x)=1$ かつ $Pern(Q_\beta)(x)=1$ である．$Q_\beta\le\hat{Q}$ であるから，明らかに $P_{Ren}(\hat{Q})(x)=1$ かつ $Pern(\hat{Q})(x)=1$ である．よって $\hat{Q}$ はΓ-可制御である．故に $\Gamma C(Q)$ は $\vee$ に関して閉じており，$\sup\Gamma C(Q)$ は存在する．　□

注意 :一般に，$Q(x^0)=1$ なる述語 $Q\in\mathbf{P}$ に対して，$\Gamma C(Q)\neq\phi$ であるとは限らない．

述語 Q に対して，部分集合 $X_Q\subseteq X$ を次式で定義する．

$$X_Q=\{x\in X;\, Q(x)=1\}$$

以下，X_Q が有限集合である場合に関して，$\sup\Gamma C(Q)$ の構成法を示す．まず次のアルゴリズムにより，述語 $H(Q)\in\mathbf{P}$ を求める．

Algorithm 1: Let $Q_0 := Q$ and iterate:

$$Q_{j+1} := Q \wedge Pern(Q_j)$$

Terminate when $Q_{j+1} = Q_j$. Then $H(Q) := Q_j$.

【命題 3 】述語 $Q \in \mathbf{P}$ に対して，X_Qが有限集合であるならば，Algorithm 1 は必ず有限ステップで終了し，得られた $H(Q) \in \mathbf{P}$ は次式を満たす．

$$H(Q) \leq Pern(H(Q)) \tag{11}$$

(証明) まず Algorithm 1 が有限ステップで終了することを証明する．

$$Q_1 = Q \wedge Pern(Q_0) \leq Q = Q_0$$

であり，更に $Q_k \leq Q_{k-1}$と仮定すると，

$$Q_{k+1} = Q \wedge Pern(Q_k) \leq Q \wedge Pern(Q_{k-1}) = Q_k$$

となる．故に$Q_0 \geq Q_1 \geq Q_2 \geq \cdots$となり，$X_Q$は有限集合であるから，Algorithm 1 は有限ステップで終了する．

つぎに (11) 式を証明する．今，$H(Q) = Q_m$となり，Algorithm 1 が終了したとする．このとき，

$$Q_m = Q_{m+1} = Q \wedge Pern(Q_m) \leq Pern(Q_m)$$

であるから，(11) 式が成り立つ． □

【定理 2 】$Q(x^0) = 1$ なる述語 $Q \in \mathbf{P}$ に対して，X_Qは有限集合であるとする．このとき，$\Gamma C(Q) \neq \phi$であるための必要十分条件は，$H(Q)(x^0) = 1$ となることである．

まず以下の補題を証明する．

【補題 2 】$Q(x^0) = 1$ なる述語 $Q \in \mathbf{P}$ に対して，$Pern(Q)(x) = 1$ かつ $P_{Ren}(Q)(x) = 1$ ならば，次式が成り立つ．

$$\sup 2^{\Gamma}(Q, x) = \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q), x) \tag{12}$$

(証明)まず$\sup 2^{\Gamma}(Q,x) \subseteq \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q),x)$を示す.任意の$\gamma \in \sup 2^{\Gamma}(Q,x)$に対して,$\gamma \in \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q),x)$となることを示せば十分である.$\sigma \in \gamma$なる$\sigma \in \Sigma$を考える.$D_{\sigma}(x)=1$のとき,$P_{Ren}(Q)(x)=1$なので,$P_{Ren}(Q)(\delta(\sigma,x))=1$である.よって次式が成り立つ.

$$wlp_{\sigma}(P_{Ren}(Q))(x)=1 \tag{13}$$

また$D_{\sigma}(x)=0$のときも(13)式が成り立つので,

$$\bigwedge_{\sigma\in\gamma} wlp_{\sigma}(P_{Ren}(Q))(x)=1$$

となり,$\gamma \in \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q),x)$である.故に$\sup 2^{\Gamma}(Q,x) \subseteq \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q),x)$となる.

逆に$P_{Ren}(Q) \leq Q$であるから,明らかに$\sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q),x) \subseteq \sup 2^{\Gamma}(Q,x)$となる. □

【補題3】$Q(x^0)=1$なる述語$Q \in \mathbf{P}$に対して,次式が成り立つ.

$$P_{Ren}(P_{Ren}(Q))=P_{Ren}(Q) \tag{14}$$

(証明)$P_{Ren}(Q) \leq Q$より,明らかに$P_{Ren}(P_{Ren}(Q)) \leq P_{Ren}(Q)$である.逆に$P_{Ren}(Q) \leq P_{Ren}(P_{Ren}(Q))$を示す.$P_{Ren}(Q)(x)=1$なる$x \in X$を考える.このとき,条件(C11)~(C14)を満たす$x^1,x^2,\cdots,x^m \in X$と$\sigma^0,\sigma^1,\cdots,\sigma^{m-1} \in \Sigma$と$\gamma^0,\gamma^1,\cdots,\gamma^{m-1} \in \Gamma$が存在する.$P_{Ren}(P_{Ren}(Q))(x)=P_{Ren}(P_{Ren}(Q))(x^m)=1$を帰納法により示す.定義より,$P_{Ren}(P_{Ren}(Q))(x^0)=1$である.今,$j=k$のとき,$P_{Ren}(P_{Ren}(Q))(x^k)=1$であると仮定する.明らかに$(Pern(Q) \wedge P_{Ren}(Q))(x^k)=1$である.条件(C11)より,$D_{\sigma^k}(x^k)=1$であり,更に条件(C13)と補題2より,$\sigma^k \in \gamma^k \in \sup 2^{\Gamma}(Q,x^k) = \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(Q),x^k)$である.故に$P_{Ren}(P_{Ren}(Q))(x^{k+1})=1$である. □

【補題4】$Q(x^0)=1$なる述語$Q \in \mathbf{P}$に対して,X_Qは有限集合であるとする.このとき,$\Gamma C(Q) \neq \phi$であるならば,任意の述語$Q' \in \Gamma C(Q)$に対して,次式が成り立つ.

$$Q' \leq H(Q) \tag{15}$$

(証明)$Q' \in \Gamma C(Q)$なる述語$Q' \in \mathbf{P}$を考える.そして(15)式をAlgorithm 1のステップ数に関する帰納法により証明する.明らかに

$$Q' \leq Q = Q_0$$

である．今，$j=k$のとき，$Q' \leq Q_k$であると仮定する．このとき，Q'のΓ-可制御性より，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} Q' &\leq P_{Ren}(Q') \wedge Pern(Q') \\ &\leq Q' \wedge Pern(Q') \\ &\leq Q \wedge Pern(Q_k) \\ &= Q_{k+1} \end{aligned}$$

故に(15)式が成り立つ． □

(定理2の証明)まず十分性を証明する．$H(Q)(x^0)=1$より，$P_{Ren}(H(Q)) \in \Gamma C(Q)$となることを示す．まず$P_{Ren}(H(Q))$が$\Gamma$-可制御，すなわち次式が成り立つことを証明する．

$$P_{Ren}(H(Q)) \leq P_{Ren}(P_{Ren}(H(Q))) \wedge Pern(P_{Ren}(H(Q))) \tag{16}$$

$P_{Ren}(H(Q))(x)=1$なる$x \in X$を考える．補題3より，$P_{Ren}(P_{Ren}(H(Q)))(x)=1$である．$Pern(P_{Ren}(H(Q)))(x)=1$を示す．$P_{Ren}(H(Q))(x)=1$より，$H(Q)(x)=1$である．そして(11)式より，$Pern(H(Q))(x)=1$である．よって補題2より，$\sup 2^{\Gamma}(H(Q),x) = \sup 2^{\Gamma}(P_{Ren}(H(Q)),x) \in 2^{\Gamma}(P_{Ren}(H(Q)),x) \neq \phi$となり，$Pern(P_{Ren}(H(Q)))(x)=1$を得る．従って(16)式が成り立つ．更に$P_{Ren}(H(Q)) \leq H(Q) \leq Q$より，$P_{Ren}(H(Q)) \in \Gamma C(Q)$である．

次に必要性を証明する．$Q' \in \Gamma C(Q)$なる述語$Q' \in \mathbf{P}$に対して，$Q'(x^0)=1$である．さらに補題4より，$Q' \leq H(Q)$であるから，$H(Q)(x^0)=1$となる．□

Qの最大Γ-可制御部分述語の構成法について次の定理が得られる．

【定理3】$Q(x^0)=1$なる述語$Q \in \mathbf{P}$に対して，X_Qは有限集合であるとする．このとき，$H(Q)(x^0)=1$であるならば，Qの最大Γ-可制御部分述語$\sup \Gamma C(Q)$は次式で得られる．

$$\sup \Gamma C(Q) = P_{Ren}(H(Q)) \tag{17}$$

(証明)定理2の証明より，$P_{Ren}(H(Q)) \in \Gamma C(Q)$である．そして任意の$Q' \in \Gamma C(Q)$に対して，補題4より，$Q' \leq H(Q)$となるので，

$$Q' \leq P_{Ren}(Q') \leq P_{Ren}(H(Q))$$

が成り立つ． □

5 例題

図 2 に示されるような二つの機械M_1, M_2とバッファB_1, B_2からなる生産システムを考える．機械M_1はパーツ 1 もしくは 2 を加工し，それぞれバッファ1 もしくは 2 へ運ぶ．機械M_2はバッファ 1 もしくは 2 からそれぞれパーツ 1 もしくは 2 を取り込み，加工する．それぞれの機械$M_i(i = 1, 2)$は，図 3 に示すオートマトンでモデル化される．ここで，I_iは機械M_iがアイドル状態であることを表し，W_{ij}は機械M_iがパーツ$j(j = 1, 2)$を加工中であることを表す．一方，バッファB_j $(j = 1, 2)$は非負整数の集合Z^+を状態の集合として持つオートマトンでモデル化され，その状態遷移は次のようになる．

$$\beta_{1j} : n \to n + 1$$

$$\alpha_{2j} : n \to n - 1$$

そして事象の集合Σと状態の集合Xは次のように与えられる．

$$\Sigma = \{\alpha_{ij}, \beta_{ij} \ ; \ i, j = 1, 2\}$$

$$X = \{(x_1, x_2, x_{b_1}, x_{b_2}); x_i \in \{I_i, W_{i1}, W_{i2}\} \text{ and } x_{b_j} \in Z^+ \ (i, j = 1, 2)\}$$

ここで，$x_i(i = 1, 2)$は機械M_iの状態であり，x_{b_j} $(j = 1, 2)$はバッファB_jの状態である．更に，初期状態は$x_0 = (I_1, I_2, 0, 0)$とし，制御パターンの集合Γは次式で与えられるとする．

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$$

但し，

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{\alpha_{12}, \alpha_{2j}, \beta_{ij} \ ; \ i, j = 1, 2\} \\ \gamma_2 &= \{\alpha_{11}, \alpha_{2j}, \beta_{ij} \ ; \ i, j = 1, 2\} \\ \gamma_3 &= \{\alpha_{2j}, \beta_{ij} \ ; \ i, j = 1, 2\} \end{aligned}$$

である．つまりγ_1, γ_2はそれぞれM_1のパーツ 1 の加工，パーツ 2 の加工を禁止し，γ_3はパーツ 1 ，2 両方の加工を禁止する制御パターンである．

今，バッファB_j $(j = 1, 2)$の容量e_jは有限であり，B_jがオーバーフローしないという制御を考える．このとき制御仕様は次のような述語Qで与えられる．

$$Q((x_1, x_2, x_{b_1}, x_{b_2})) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{b_j} \le e_j \ (j = 1, 2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

簡単のため，$e_1 = e_2 = 1$とおく．このとき，QはΓ-可制御でないことは容易に確かめられ，X_Qは有限であるから，定理 3 よりQの最大Γ-可制御部分述語$\sup\Gamma C(Q)$は次式で与えられる．

$$\sup\Gamma C(Q)((x_1, x_2, x_{b_1}, x_{b_2})) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \#_j(x_1) + x_{b_j} \leq 1 \quad (j = 1, 2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

但し，

$$\#_j(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x_1 = W_{1j} \quad (j = 1, 2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

そして，$Re(G|f) = \sup\Gamma C(Q)$ なる非決定状態フィードバック f は次式で与えられる．

$$f((x_1, x_2, x_{b_1}, x_{b_2})) = \begin{cases} \{\gamma_3\} & \text{if } \#_1(x_1) + x_{b_1} = 1 \text{ and } \#_2(x_1) + x_{b_2} = 1 \\ \{\gamma_1, \gamma_3\} & \text{if } \#_1(x_1) + x_{b_1} = 1 \text{ and } \#_2(x_1) + x_{b_2} = 0 \\ \{\gamma_2, \gamma_3\} & \text{if } \#_1(x_1) + x_{b_1} = 0 \text{ and } \#_2(x_1) + x_{b_2} = 1 \\ \Gamma & \text{otherwise} \end{cases}$$

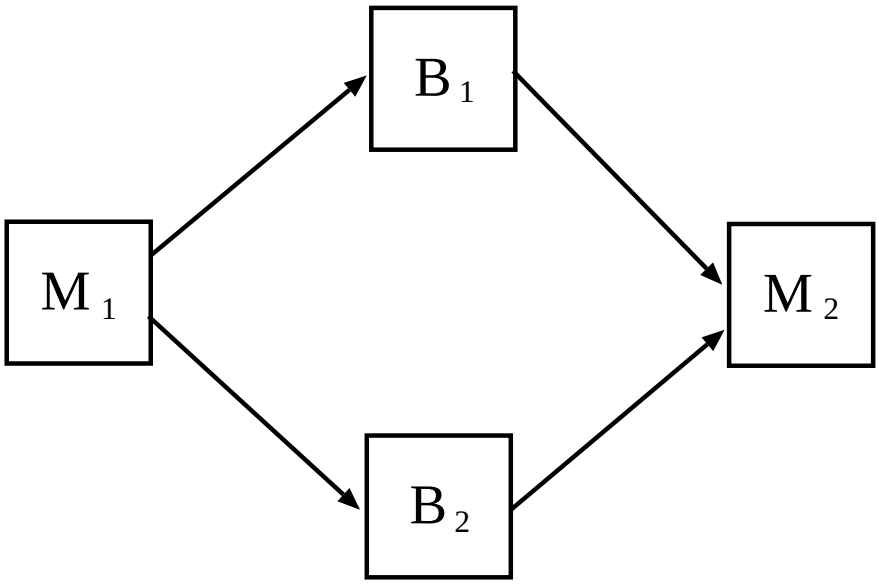

図 2: 簡単な生産システム

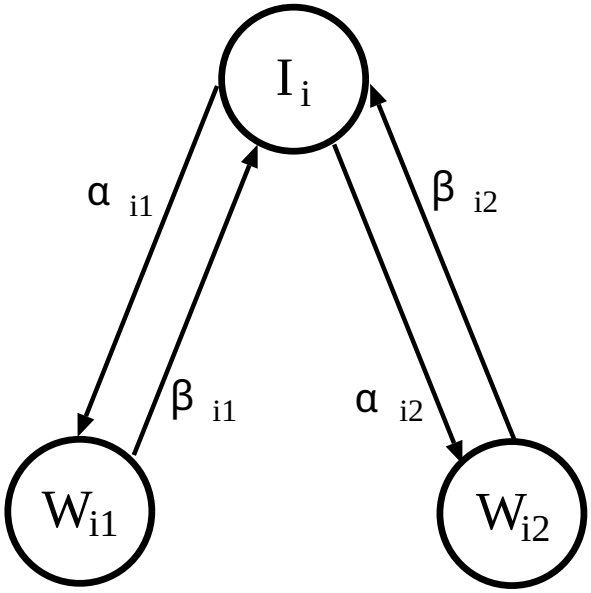

図 3: 機械 M_iの状態遷移図

6 結言

本研究では,一般に制御パターンの集合が部分束とはならない離散事象システムにおいて,制御仕様が状態の集合上の述語で与えられる場合の非決定状態フィードバック制御について考察した.まず述語のΓ-可制御性の概念を定義し,制御仕様を満たす非決定状態フィードバックが存在するための必要十分条件は,その制御仕様がΓ-可制御であるということを示した.しかし,一般に与えられた制御仕様がΓ-可制御であるとは限らない.この場合,与えられた制御仕様のΓ-可制御部分述語に対して,非決定状態フィードバックを構成することになる.そこでその制御仕様を満たす状態の集合が有限の場合に関して,最大Γ-可制御部分述語の構成法を示した.

また,本研究ではシステムの状態が完全に観測可能であるとしている.状態に関して部分的な観測のみが可能な場合[5],[6]についての考察は今後の課題である.

参考文献

[1] P. Varaiya and A.B. Kurzhanski : Discrete event Systems: Models and Applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **103**, Springer (1988)

[2] P.J. Ramadge and W.M. Wonham : The Control of Discrete Event Systems, Proc. IEEE, **77**-1, 81/98 (1989)

[3] 潮　俊光 : 離散事象システムにおける制御問題とスーパバイザ , システム/制御/情報 , **34**-1, 531/538 (1990)

[4] P.J. Ramadge and W.M. Wonham : Modular Feedback Logic for Discrete Event Systems, SIAM J. Contr. Optimiz., **25**-5, 1202/1218 (1987)

[5] Y. Li and W.M. Wonham : Control of Vector Discrete-Event Systems *I*-The Base Model, IEEE Trns. Automatic Control, **AC-38**-8, 1214/1227 (1993)

[6] R. Kumar, V.K. Garg and S.I. Marcus : Predicates and Predicate Transformers for Supervisory Control of Discrete Event Dynamical Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-38**-2, 232/247 (1993)

[7] T. Ushio : Feedback Logic for Discrete Event Systems with Arbitrary Control Patterns, Int. J. Control, **52**-1, 159/174 (1990)

[8] S. Takai, T. Ushio and S. Kodama : A Note on Static State Feedback Control of Discrete Event Systems under Partial Observation, Proc. of 32nd IEEE Conf. on Decision and Control, 1206/1211 (1993)

[9] Y. Li and W.M. Wonham : Strict Concurrency and Nondeterministic Control of Discrete-Event Systems, Proc. of 28th IEEE Conf. on Decision and Control, 2731/2736 (1989)

[10] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman : Introduction to Automata Theory, Language, and Computation, Addison-Wesley (1979)

[11] C.H. Golaszewski and P.J. Ramadge : Control of Discrete Event Processes with Forced Events, Proc. of 26th IEEE Conf. on Decision and Control, 247/251 (1987)

謝辞

本研究を遂行するにあたって絶えず懇切丁寧な御指導，御教示を賜りました本学電子工学科，児玉慎三教授に深く感謝いたします．

本学電子工学科兼大型計算機センターの熊谷貞俊教授には本研究の全課程を通じて御指導頂き厚く御礼申し上げます．

神戸女学院大学の潮俊光助教授には本研究を通じて日頃から御指導と暖かい励ましを頂き，心から感謝致します．

日頃から本研究の全課程を通じて御指導頂いた本学電子工学科の高井重昌助手に深く感謝致します．

本学大学院修士課程の先輩方には本研究の全課程を通じて御指導，助言を頂き厚く感謝の意を表します．

また，最後になりましたが，筆者が所属している児玉研究室の諸氏には有益な示唆及び討論を通じて，絶えず暖かく励まして頂いたことに深く感謝致します．